

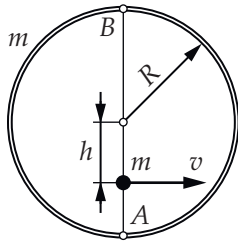


## Условия задач, ответы и критерии оценивания

### 1. Бильярд на льду (8 баллов)

Ромашка М. Ю.

На ровную горизонтальную поверхность ледяного катка положили однородный тонкий обруч радиусом  $R$  и массой  $m$ . В точку, лежащую на диаметре обруча  $AB$ , на неизвестном расстоянии  $h$  от центра обруча поместили шайбу массой  $m$  и сообщили ей скорость  $v$ , направленную перпендикулярно  $AB$ . Взаимодействие между шайбой и обручем абсолютно упругое. После столкновения с обручем шайба и обруч движутся так, что в следующий раз шайба попадает в точку  $B$  обруча. Радиус шайбы пренебрежимо мал, трения нет, обруч можно считать абсолютно твёрдым телом. Определите расстояние  $h$ .



### 2. Треугольники на тетраэдре (10 баллов)

Крюков П. А., Бычков А. И.

На грани правильного тетраэдра, изготовленного из пенопласта (диэлектрическая проницаемость

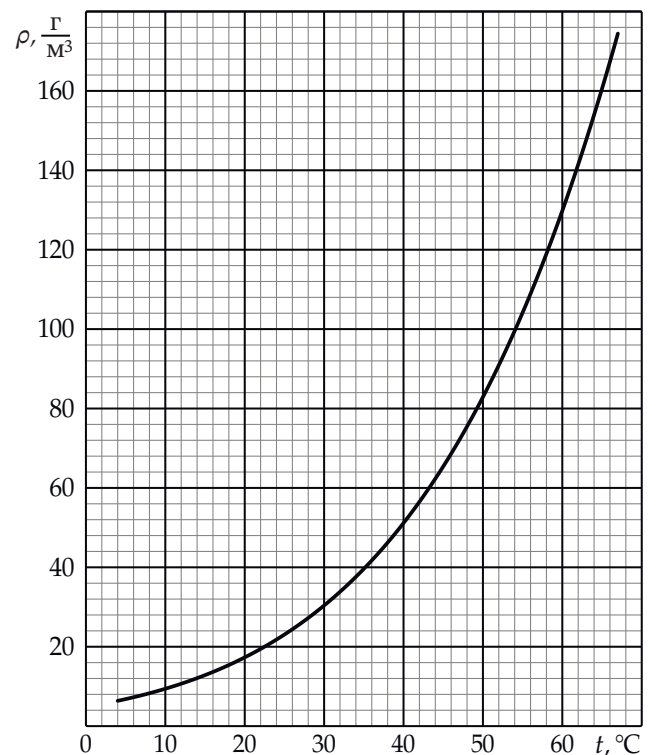
равна 1), наклеены одинаковые тонкие металлические пластины в форме правильных треугольников, почти совпадающие по размерам с гранями тетраэдра. Электрического контакта между пластинами нет. Заряд любой пластины изначально равен нулю. Если одной пластине сообщить заряд  $Q$ , то её потенциал будет равен  $\frac{Q}{C_0}$ . Если теперь заземлить любую незаряженную пластину, то потенциал заряженной окажется равен  $\frac{Q}{C_1}$ . Найдите разность потенциалов двух пластин, если на одну из них нанесён заряд  $Q$ , а заряд второй равен  $-Q$ , при условии, что другие две пластины не заряжены. Чему равна ёмкость конденсатора, одной обкладкой которого является любая пластина тетраэдра, а другой — три оставшиеся пластины, соединённые друг с другом идеальным проводником?

### 3. В сосуде (9 баллов)

Крюков П. А.

В невесомости в высоком цилиндрическом сосуде с площадью основания  $0,05 \text{ м}^2$  находится вода массой  $m$  в жидком состоянии и влажный воздух, давление которого в любой точке сосуда равно внешнему давлению  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ , а температура равна температуре воды и равна  $t = 65^\circ \text{С}$ . Сосуд открыт сверху, поэтому относительная влажность воздуха в сосуде вследствие диффузии меняется линейно в зависимости от расстояния  $x$  до его дна, покрытого водой. Можно считать, что вблизи дна влажность равна 100 %, а на расстоянии  $H = 1 \text{ м}$  от дна она уменьшается до 20 %. График зависимости плотности насыщенных паров воды от температуры показан на приведённом ниже рисунке.

Молярные массы сухого воздуха и воды равны 29 г/моль и 18 г/моль соответственно. Универсальная газовая постоянная равна  $R = 8,3 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ .



**А. (4 балла)** Пусть в начальный момент масса воды в жидком состоянии равна  $m_1 = 32 \text{ г}$ . Сосуд герметизируют, устанавливая специальную тонкую жёсткую задвижку на высоте  $H = 1 \text{ м}$ . После этого температуру в сосуде медленно увеличивают до  $100^\circ \text{С}$ . Найдите давление в сосуде в конечном состоянии.

**В. (5 баллов)** В этом случае начальная масса жидкости в сосуде равна  $m_2 = 1,2 \text{ г}$ . На расстоянии  $H$  от дна сосуда устанавливают поршень, который может скользить без трения вдоль оси сосуда. После этого температуру в сосуде начинают медлен-

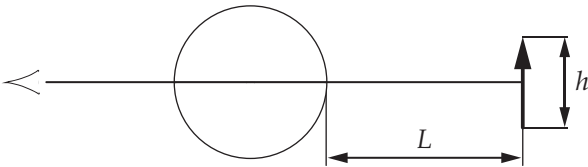
но уменьшать. Найдите расстояние от дна сосуда до поршня при температуре  $60^\circ\text{C}$  и  $10^\circ\text{C}$ .

#### 4. Через шар (14 баллов)

Крюков П. А.

В этой задаче предлагается проанализировать изображения плоских предметов в прозрачном шаре радиусом  $R$ , изготовленном из стекла с показателем преломления  $n = \frac{3}{2}$ . Во всех частях задачи можно считать линию зрения перпендикулярной плоскости предмета, а центр шара — лежащим на линии зрения, как показано на схематичном рисунке ниже. Предлагается рассматривать только те изображения, которые формируются параксиальными (приосевыми) лучами.

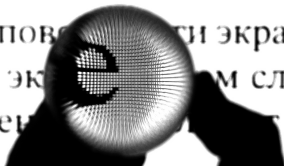
Линейным увеличением  $\beta$  назовём отношение перпендикулярного линии зрения размера изображения  $h'$  к соответствующему размеру предмета  $h$ .



А. (4 балла) В шаре наблюдают изображение удалённого предмета размером  $h$ . Расстояние от шара до предмета равно  $L$ :  $L \gg R$ ,  $L \gg h$  (см. рисунок выше). Определите зависимость  $\beta(L)$ .

В. (6 баллов) Шар прислонили к поверхности экрана компьютерного монитора. С каким увеличением  $\beta$  можно видеть буквы (и отдельные пиксели) на экране в этом случае?

Шар прислонили к поверхности экрана. С каким увеличением  $\beta$  можно видеть буквы на экране в этом случае? Линия зрения направлена на экран, центр шара находится на линии зрения.



С. (4 балла) На приведённом выше фрагменте фотографии экрана компьютерного монитора, к которому прижат стеклянный шар, наблюдается увеличенное в шаре изображение пикселей.

Пусть шар радиусом  $R = 2$  см прижали к экрану монитора и сфотографировали с расстояния  $S = 1$  м, при этом центр шара находился вблизи оптической оси объектива, перпендикулярной плоскости экрана. Разрешение монитора составляло  $2560 \times 1440$  пикселей, а длина диагонали экрана — 32 дюйма. Размеры светочувствительной матрицы фотоаппарата были равны  $23,5 \times 15,6$  мм. Оказалось, что изображение в шаре горизонтального отрезка экрана из 20 пикселей занимает на фотографии чуть больше 100 точек при размере длинной стороны фотографии 3000 точек. Определите по этим данным фокусное расстояние  $F$  объектива фотоаппарата. Учтите, что  $F \ll S$ , 1 дюйм  $\approx 2,54$  см.

Ответ: А)  $\beta = \frac{3R}{2L}$ ; В)  $\beta = 3$ ; С)  $f = (49 \pm 2)$  мм.

#### 5. Аналогии (14 баллов)

Крюков П. А. по мотивам EuPhO 2020.

А. (7 баллов) В вакууме, в области, где нет зарядов и токов, электрическое и магнитное поля описываются одинаковыми с математической точки зрения дифференциальными уравнениями (с точностью до знаков и постоянных множителей), поэтому картины линий этих полей вдали от источников очень похожи. Например, напряжённость поля точечного электрического диполя ( $\vec{p} = ql$  — дипольный момент) в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$  даёт формулой

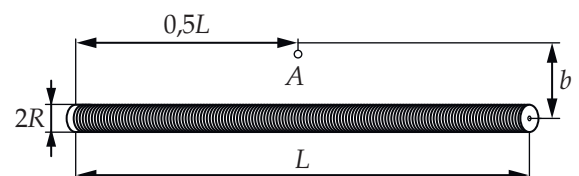
$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right),$$

которая превращается в формулу для индукции магнитного поля витка с током (магнитного диполя) при замене:  $E \rightarrow B$ ,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}$ ,  $\vec{p} \rightarrow \vec{\mu}$ ;  $\vec{\mu} = IS\vec{n}$  — магнитный момент витка площадью  $S$  с током  $I$ ,  $\vec{n}$  — вектор единичной нормали к плоскости витка.

Рассмотрим соленоид с количеством витков  $N$  ( $N \gg 1$ ) длиной  $L$ , намотанный достаточно тонким проводом виток к витку на полый цилиндрический немагнитный сердечник с радиусом основания  $R$  ( $R \ll L$ ). По виткам соленоида течёт ток  $I$ .

А1) (2 балла) На большом расстоянии от витков соленоида его поле эквивалентно полю двух фиктивных магнитных зарядов, расположенных на торцах соленоида. Найдите модуль магнитного заряда  $Q_M$  любого из торцов соленоида.

А2) (3 балла) Чему равна индукция магнитного поля соленоида в точке  $A$  (см. рисунок) на расстоянии  $b$  ( $b \gg R$ ,  $b \ll L$ ) от его оси?



А3) (2 балла) Найдите индукцию магнитного поля соленоида в точке, лежащей вне соленоида на его оси на расстоянии  $h$  ( $R \ll h \ll L$ ) от его торца.

В. (7 баллов) Аналогию можно развить, обратив внимание на то, что напряжённость вихревого электрического поля, порождаемого изменяющимся магнитным полем бесконечного соленоида, на расстоянии, много большем радиуса соленоида, описывается соотношением, очень похожим на формулу  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  для индукции магнитного поля прямолинейного провода с током  $I$  на расстоянии  $r$  от него.

В1) (1 балл) Найдите напряжённость вихревого электрического поля на расстоянии  $b$  от оси очень длинного цилиндрического соленоида радиусом  $a$  ( $b > a$ ), магнитное поле в котором изменяется с известной скоростью  $\frac{dB}{dt}$ .

Тонкую цилиндрическую трубку с радиусом основания  $r$  и длиной  $2\pi R$  ( $R \gg r$ ) из немагнитного материала согнули в кольцо, на которое после намотали  $N$  ( $N \gg 1$ ) витков тонкого провода виток к витку, так что получилась тороидальная катушка. Выводы катушки подключили к специальному источнику напряжения, в итоге ток в катушке в зависимости от времени начал изменяться по закону  $I(t) = kt$ , где  $k$  — известная постоянная.

В2) (3 балла) Определите напряжённость вихревого электрического поля в центре тора.

В3) (3 балла) На главной оси тора на расстоянии  $h$  от него ( $h \gg R$ ) располагается точечный заряд  $q$ . Какая сила действует на заряд со стороны вихревого электрического поля?